جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات
السنة الثانية

التحليل (4)

المحاضرة النظرية الأولى

إعداد : داني محفوض

مقدِّمة المادة ...

التحليل (4) – مقرَّر فصل ثاني – لطلاب السنة الثَّانية

وُضِعَ مقرَّر التحليل(4) لطلاب السنة الثانية بالفصل الدراسي الثاني بشكل رئيسي ليعطينا تعميماً لما درسناه في السنة الأولى بشكل عام , و على وجه الخصوص مواضيع التحليل الرياضي التي تناولناها في **التحليل(1)** , و على وجهٍ أكثرَ خصوصية تعميماً لمفاهيم الحساب التفاضلي و التكاملي للدوال ذات المتحول الوحيد , و يكمن هذا التعميم بأننا سنقوم بدراسة الحساب التفاضلي و التكاملي لدوال بعدة متحولات .
دوناً عن كون هذا المقرر سيعطينا أيضاً تارةً تعميماً و تارةً أخرى تثبيتاً لبعض مفاهيم الجبر التي تناولنها في مادتي **الجبر الخطي(1)** و **الطبولوجيا العامة(1)** (الفضاءات الشعاعية و المترية) و سيكونُ ذلك في المحاضرات الأولى من المادة . وَ نشير أيضاً إلى أنَّ في هذا المقرَّر سنحصل على ما توجَّب إعطاؤه لنا في مقرر **التحليل(2)** و لم يعطى لضيق الوقت .. ما نقصده هو موضوع التكاملات الثنائية و الثلاثية .

<u>سنذكر فيما يلي العناوين الرئيسية التي سنقوم بدراستها بمادة التحليل(4) :</u>

- ***الفضاءات المنظمة و الفضاءات الإقليدية :***
  الفضاءات المتجهية و الفضاءات التآلفية و الفضاءات المترية و الفضاءات الطبولوجية و فضاءات الجداء الداخلية – متباينة شوارتز – فضاء باناخ .

- ***التطبيقات , النهاية و الاستمرار :***
  نهاية الدوال – تعريف نهاية دالة معرفة على فضاء متري عن طريق مفهوم تقارب المتتالية (نتائج و مبرهنات هامة) – العمليات على نهايات الدوال – استمرار التطبيقات و الاستمرار المنتظم – فضاءات الدوال المحدودة و المحدودة المستمرة – نتائج و مبرهنات هامة .

- ***مفاضلة التطبيقات :***
  تفضل فريشة و قابلية المفاضلة حسب فريشة – دراسة حالات خاصة – شروط قابلية المفاضلة - - التطبيقات ذوات المشتقات المستمرة – المشتقات الجزئية - نتائج و مبرهنات هامة – المصفوفة اليعقوبية لدالة متجهة لعدة متحولات .

- ***التكاملات الثنائية و الثلاثية :***
  تعريف التكامل الثنائي و شروط وجوده – شروط وجود التكامل الثنائي على ساحة مستطيلة – تعريف و شروط وجود التكامل الثنائي على ساحة اختيارية – الخواص الأساسية للتكامل الثنائي – التكامل الثلاثي (تعاريف و تطبيقات) .

المقررات المتوافرة لمادة التحليل(4) :

يتوافر مقرَّر التحليل(4) ***بمكتبة أميسا*** (بثمن باهظ جداً) – عدد صفحات المقرَّر 594 صفحة – المقرر ضخم جداً و يحوي على كم هائل من المفاهيم و المعلومات و الأمثلة و الأبحاث التي لا يذكراها مدرسا المقرر أثناء الإعطاء لضيق الوقت – هذا المقرر من تأليف **الدكتور هيثم كامل ناصر** .
كما يتوافر مقرَّر آخر لهذه المادة بمكتبة المطالعة بكلية العلوم بالطابق الرابع و هذا المقرر من تأليف **الدكتور سامي الحسين** .
نصيحة : إذا كانَ الهدف هو النجاح فقط النجاح و بمعدل بهذه المادة .. فلا ينصح بدراسة أي من المقررين و الاقتصار على دراسة ما سيقوما بإعطائه مدرِّسا المادة : الدكتور عصام نسيم .. و .. الأستاذ رياض جبيلي .

مع أطيب التمنيات بالتوفيق ..   داني محفوض ..

مفردات المحاضرة الأولى :

سنقوم بداية بدراسة مفهوم **الفضاء الشعاعي** (المتجهي) .
ثم سنقوم بدراسة **بعض الأمثلة** على هذا المفهوم .
ثم سنقوم بدراسة **بعض النتائج الهامة** .
ثم ندرس مفهوم **الفضاء الشعاعي الجزئي** .
و سنختم المحاضرة بدراسة مفهوم **الأشعة المرتبطة خطياً** وَ **الأشعة المستقلة خطياً** .

لنبدأ ....

أولاً : مفهوم الفضاء الشعاعي :

مقدمة عن مفهوم الفضاء الشعاعي :

إنَّ مفهوم الفضاء الشعاعي يستخدم على نطاقات واسعة في شتى العلوم التطبيقية حيث يدخل بجذورها و أعماقها .. و تعود أسس هذا المفهوم إلى الرياضيات عموماً و إلى الجبر المجرَّد على وجه الخصوص ..
نقول : فضاء شعاعي أو فضاء متَّجهي .. و كلاهما بنفس المعنى (المقصود بكلمة متجه نفسه المقصود بكلمة شعاع , و ذلك في دراستنا الجبرية فقط .. دون الميكانيك و الهندسة !.. حيثُ نوظف بهما المتجه على أنه مستقيم موجه و من الخاطئ أن نقول **شعاع** .. حيث تعني هذه الكلمة **نصف** مستقيم موجَّه , و هذا الاصطلاح غير دقيق إطلاقاً) ..
– المقصود هنا بكلمة متجه هو **ليسَ بالضرورة** المتجه الذي نعرفه في الفيزياء و الميكانيك و الهندسة (أي المستقيم الموجه) , بل المقصود بكلمة متجه هنا هو كائن جبري ما .. فقد يكون المقصود فيه عدد أو مصفوفة أو دالة أو .. الخ , وقد يكون أيضاً المقصود فيه هو المتجه الذي نعرفه بالعادة (أي المستقيم الموجه) , يعود ذلك إلى طبيعة عناصر الفضاء الشعاعي المدروس ..

نرمز للفضاء المتجهي بحرف كبير مثل : U أو V أو D أو W .. الخ
وَ نرمز لعناصر الفضاء المتجهي بأحرف صغيرة مثل : u أو v أو d أو w .. الخ
و كما قلنا نسمي عناصر الفضاء **أشعة** .. فنقول مثلاً .. الشعاع u أو الشعاع v أو الشعاع d أو الشعاع w ..

انتهت المقدمة ..... لنتعرَّف الآن إلى مفهوم الفضاء الشعاعي ....

ما معنى فضاء شعاعي ؟ ....
إن أول ما يجب أن يتبادر لأذهاننا فور سماعنا لهذا المصطلح هو : المجموعة ....
و لكن بالتأكيد ذلك لا يعني أنَّ أي مجموعة هي فضاء شعاعي !! , أي أنَّ هناك مجموعة من الشروط الواجب تحققها في المجموعة حتى تكون فضاء شعاعي ..
ما هي هذهِ الشروط ؟ .... تبدأ هذه الشروط بما يلي :
يجب أن يكون معرَّف على هذهِ المجموعة قانوني تشكيل أحدهما داخلي (جمعي) و الآخر خارجي (ضربي) ...
قبل أن نكمل بقية الشروط نورد فيما يلي تذكرة بمفهومي قانون التشكيل الداخلي و قانون التشكيل الخارجي ...

ما معنى (قانون تشكيل داخلي) ؟

لتكن لدينا G مجموعة غير خالية . نسمي كل (تابع) تطبيق $G \times G \to G$,أي التطبيق الذي منطلقهُ مجموعة الجداء الديكارتي للمجموعتين : (المجموعة الأولى هيَ G , و المجموعة الثانية هيَ G نفسها) , و مُستقرَّهُ المجموعة G نفسها , قانون تشكيل داخلي على المجموعة G . في دراستنا للفضاء الشعاعي سيكون هذا القانون جمعياً فنرمز له بالرمز (+) .

ما معنى (قانون تشكيل خارجي) ؟

لتكن لدينا G و K مجموعتين غير خاليتين . نسمي كل (تابع) تطبيق $G \times K \to G$, أو $G \times K \to K$ أي التطبيق الذي منطلقهُ مجموعة الجداء الديكارتي للمجموعتين K وَ G ,و مُستقرَّهُ هوَ أحد المجموعتين K أو G , قانون تشكيل خارجي على المجموعة K إذا كان المستقر هو المجموعة G , أو قانون تشكيل خارجي على المجموعة G إذا كان المستقر هو المجموعة K .
في دراستنا للفضاء الشعاعي سيكون هذا القانون ضربياً فنرمز له بالرمز (.) .

نكمل الآن بشروط كون المجموعة فضاء شعاعي :

قلنا يجب أن يكون معرَّف على هذهِ المجموعة قانوني تشكيل أحدهما داخلي (+) جمعي و الآخر خارجي ضربي (.) ....
ثمَّ إنَّ لكل قانون من هذين القانونين أربع شروط يجب أن تكون محققة حتى تكون المجموعة هي فضاء شعاعي .

أولاً : من أجل قانون التشكيل الداخلي الجمعي (+) :

بدايةً .. كما أشرنا في العنوان .. يجب أن يكون هذا القانون داخلياً أي يجب أن تكون العملية (+) داخلية في المجموعة التي نبين متى تكون فضاء شعاعي , أي يجب أن تكون هذه المجموعة مغلقة بالنسبة للعملية (+) , أي يجب أن يكون حاصل التشكيل الجمعي لأي عنصرين من عناصر المجموعة هو عنصر من هذهِ المجموعة , أي أن ناتج إجراء العملية (+) بين أي عنصرين من هذه المجموعة هو عنصر من هذه المجموعة.

ثُمَّ إنَّ الشروط الأربعة الواجب تحقُّقها في المجموعة بالنسبة للعملية (+) هي ما يلي :

1- إن العملية (+) هي عملية تبديلية في المجموعة , أي أنَّ : مهما كان الشُّعاعين u وَ v من المجموعة فإنَّ :

$$u + v = v + u$$

2- إن العملية (+) هي عملية تجميعية في المجموعة, أي أنَّ : مهما كانت الأشعة u وَ v وَ w من المجموعة فإنَّ :

$$u + (v + w) = u + (v + w)$$

3- يوجد في هذه المجموعة عنصر وحيد نسميه العنصر الحيادي بالنسبة للعملية (+) و نرمز له بالرمز 0 و ما يميز هذا العنصر عن بقية العناصر هو أن حاصل تشكيله الجمعي مع أي عنصر آخر من عناصر المجموعة هو هذا العنصر الآخر نفسه و كذلك حاصل تشكيل أي عنصر آخر من المجموعة مع هذا العنصر الحيادي بالنسبة للعملية الداخلية (+) هو هذا العنصر الحيادي نفسه , أي : مهما كان العنصر u من المجموعة فإنَّ :

$$u + 0 = 0 + u = u$$

4- يوجد من أجل كل عنصر من عناصر هذه المجموعة عنصر نظير جمعي له بالنسبة للعملية (+) , بحيث أن حاصل التشكيل الجمعي لأي عنصر من عناصر المجموعة مع العنصر النظير الجمعي له هو العنصر الحيادي بالنسبة للعملية (+) .
نرمز للعنصر النظير الجمعي للعنصر u من المجموعة بالرمز $-u$, أي أنَّ :
من أجل أي عنصر u من المجموعة هناك عنصر نظير له نرمز له بالرمز $-u$ و يحقق : $u + (-u) = 0$

انتهت الشروط الواجب تحققها بالنسبة للعملية (.) في مجموعة حتى تكون فضاء شعاعي ....

قبل أن ننتقل إلى الشروط الواجب تحققها في المجموعة بالنسبة للعملية (.) نود أن نشير إلى الملاحظة :

ملاحظة : قلنا أن قانون التشكيل الداخلي الجمعي هو عبارة عن تطبيق منطلقه هو مجموعة الجداء الديكارتي لمجموعتين متساويتين , و كل مجموعة من هاتين المجموعتين هي المجموعة التي نتحدث عن أنها متى تكون فضاء شعاعي ..
و مستقر هذا التطبيق أيضاً هو المجموعة نفسها .....
لكن ! قلنا أن قانون التشكيل الخارجي هو عبارة عن تطبيق منطلقه مجموعة الجداء الديكارتي لمجموعتين مختلفتين ...
و مستقر هذا التطبيق هو أحد هاتين المجموعتين .....
من هما هاتين المجموعتين هنا ؟؟
إحدى هاتين المجموعتين هي المجموعة التي نتحدث عن أنها متى تكون فضاء شعاعي , و المجموعة الأخرى هي مجموعة الأعداد الحقيقية ..
سؤال ! ... من هو مستقر هذا التطبيق ؟؟
لاحظ أننا نقول أحد المجموعتين هي مجموعة الأعداد الحقيقية , و قانون التشكيل هو قانون خارجي ضربي ..
خارجي أي حاصل تشكيل أي عنصر (عدد حقيقي) من مجموعة الأعداد الحقيقية مع عنصر من المجموعة الأخرى هو عنصر من أحد المجموعتين ..
(أي أنّ◌َ◌ّ◌ّ أحد هاتين المجموعتين هي من ستكون مستقر التطبيق) .
ضربي أي أنَّنا نقوم بضرب أعداد حقيقية بعناصر المجموعة الأخرى (التي قد تكون مجموعة أعداد أو مصفوفات أو دوال أو الخ ..) ..
و ذلك ما يعني أَنّ المجموعة الأخرى مهما كانت طبيعة عناصرها هي من تحدد مستقر التطبيق , أو حتى بتعبير أدق .. ! *المجموعة* الأخرى هي مستقر التطبيق.
نختم الملاحظة بما يلي : ببعض الكتب مثل كتاب الجبر الخطي(1) يُكتَب : حقل الأعداد الحقيقية و لا يكتب كما كتبنا أعلاه (مجموعة الأعداد الحقيقية) , و ذلك ليسَ خاطئاً على الإطلاق , وَ لكن هنا كتبنا مجموعة الأعداد الحقيقية و ليس حقل الأعداد الحقيقية لكونه في دراستنا هذه لا تهمنا أي خاصة من خواص الحقل , لذلك تبعاً للتبسيط في إيصال المعلومة كتبنا مجموعة الأعداد الحقيقية و لم نكتب حقل الأعداد الحقيقية , و كي لا نضطر لشرح معنى الحقل لكونه لا يهمنا الآن .

و الآن ننتقل للشروط الواجب تحققها في المجموعة لتكون فضاء شعاعي , بالنسبة لقانون التشكيل الخارجي الضربي (.) ....

ثانياً : من أجل قانون التشكيل الخارجي الضربي (.) : **هنا العملية خارجية أي أن حاصل التشكيل الضربي لأي عدد حقيقي مع شعاع من المجموعة هو شعاع من المجموعة .**

1- إنَّ العملية (.) تقبل التوزيع على العملية (+) , أي مهما كان الشعاعين u وَ v , و العنصر a من مجموعة الأعداد الحقيقية (العدد الحقيقي a) , فإنَّ : $a.(u+v) = a.u + a.v$

و بالعكس .....

2- إنَّ العملية (+) تقبل التوزيع على العملية (.) , أي مهما كان العنصرين x وَ y من مجموعة الأعداد الحقيقية (أي x وَ y عددين حقيقيين) , و الشعاع w من المجموعة التي نبين متى تكون فضاء شعاعي , فإنَّ : $(x+y).w = x.w + y.w$

3- العملية (.) تجميعية على عناصر المجموعة التي نبين متى تكون فضاء شعاعي , أي مهما كانت الأشعة u وَ v وَ w فإنَّ :

$$u.(v.w) = u.(v.w)$$

4- إنَّ حاصل التشكيل الضربي لأي شعاع من المجموعة التي نبين متى تكون فضاء شعاعي مع العنصر 1 من مجموعة الأعداد الحقيقية **(أي العدد الحقيقي *1* الذي هو واحدة حقل الأعداد الحقيقية ..)** , هو هذا الشعاع نفسهُ ! .. أي أن :

مهما كان الشعاع u من المجموعة التي نبين متى تكون فضاء شعاعي , فإن : $1.u = u$

انتهت الشروط الواجب تحققها بالنسبة للعملية (.) في مجموعة حتى تكون فضاء شعاعي ....

ختاماً ......

عندما تتحقّق هذهِ الشروط الثمانية ....

(أربعة من أجل العملية الداخلية و أربعة من أجل العملية الخارجية) ..

تكون المجموعة المعرَّف على عناصرها هاتين العمليتين ..

فضاءً شعاعياً ..

نختم دراستنا النظرية لمفهوم الفضاء الشعاعي بما يلي : ....

تسمى **عناصر المجموعة المعرف عليها قانوني التشكيل الداخلي (+) و الخارجي (.) و المحقق فيها الشروط الثمانية الواردة أعلاه متجهات أو أشعة , و تسمى العملية (+) عملية جمع المتجهات أو الأشعة , و العملية (.) بعملية ضرب متجه أو شعاع من هذه المجموعة بعدد حقيقي ..**

كما نسمي العنصر *0* الوارد بالبند -3- من فقرة الشروط (أولاً) بالمتجه الصفري .. أو صفر الفضاء الشعاعي ..

كما نسمي العنصر $-u$ الوارد بالبند -4- من فقرة الشروط (أولاً) بالنظير الجمعي للمتجه u ..

ما يجب إتقانه و حفظهُ بصماً :

لتكن المجموعة غير الخالية V مزودة بالعمليتين الآتيتين , الأولى داخلية و الثانية خارجية :

تسمى جمعاً : $V \times V \to V ; (x,y) \to x+y$ وَ تسمى ضرباً : $R \times V \to V ; (a,y) \to a.y$

نقول عن V أنها فضاء شعاعي إذا تحققت الشروط التالية :

1) $\forall x,y,z \in V \; (x+y)+z$

2) يوجد في V عنصر حيادي بالنسبة للعملية (+) نسميه صفر الفضاء الشعاعي و يحقق العلاقة التالية : $\forall x \in V ; x+0 = 0+x = x$

3) يوجد لكل عنصر x من V عنصر نظير $-x$, يحقق : $x+(-x) = 0$

4) $\forall x,y \in V ; x+y = y+x$ (و ذلك ما يعني أنَّ المجموعة V مع العملية + تشكل زمرة تبديلية)

5) $\forall x,y \in V \;,\; a \in R \;;\; a.(x+y) = a.x + a.y$

6) $\forall x \in V \;,\; a, b \in R \;;\; (x+y).a = x.a + y.a$

7) $\forall x \in V \;,\; a, b \in R \; (a.b)x = a.(b.x)$

8) $\forall x \in V \;;\; 1.x = x \;;\; 1 \in R$

ثانياً : أمثلة على الفضاء الشعاعي :

1) إنَّ أي حقل عددي K هو فضاء متجهي فوق نفسه (أي يأخذ مؤثراته من نفسه) و ذلك بالنسبة لعمليتي الجمع و الضرب المعرفتين على K , فمثلاً إنَّ R فضاء متجهي فوق نفسه .

2) إنَّ مجموعة كل المصفوفات من المرتبة $m \times n$ و المعرفة فوق حقل الأعداد الحقيقية , تمثل فضاء شعاعي فوق الحقل R , و ذلك بالنسبة لعملية جمع المصفوفات و جداء مصفوفة بعدد حقيقي .

3) إذا عرفنا على الجداء الديكارتي : $R^n = \{x_1, x_2, x_3, x_4 \dots\dots\dots, x_n\}$; $x_i \in R ; i = 1, 2, 3, 4, \dots n$
عمليتي الجمع و الضرب بالشكل التالي :

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots\dots, x_n + y_n)$$
$$a.(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (a.x_1, a.x_2, a.x_3, \dots, a.x_n)$$

فإنَّ R^n تكون فضاء متجهي فوق R .

4) لتكن X مجموعة ما , و لنرمز بالرمز B(X,R) لمجموعة الدوال الحقيقية المعرفة و المحدودة على X , إذا عرفنا مجموع دالتين من B(X,R) بالشكل التالي : $f + g : X \to R \; ; \; x \to (f+g)(x) = f(x) + g(x)$
و ضرب دالة f بعدد حقيقي a , بالشكل : $a.f : X \to R \; ; \; x \to (a.f)(x) = a.f(x)$
يمكن التحقق من أنَّ B(X,R) تشكل فضاء شعاعي فوق مجموعة الأعداد الحقيقية R , و نلاحظ أن الحيادي هنا بالنسبة لعملية الجمع الداخلية هو التطبيق الصفري , و أنَّ نظير العنصر (التابع) f من B(X,R) هو التطبيق $-f$.

ثالثاً : نتائج هامَّة :

1) $\forall a \in R, \forall x \in V$ فإنَّ : $a.x = 0 \to x = 0 \; or \; a = 0$
حيث أن x شعاع و a عدد حقيقي .

2) $\forall a, b \in R \quad ; \quad \forall x, y \in V$ فإنَّ :
$$a.(x - y) = a.x - a.y \quad \text{و} \quad (a - b).x = a.x - b.y$$
ملاحظة : $x - y$, أي جمع العنصر x مع نظير العنصر y .

رابعاً : مفهوم الفضاء الشعاعي الجزئي :

ليكن V فضاء شعاعي و لتكن f مجموعة جزئية غير خالية من V , نقول عن f أنها فضاء شعاعي جزئي من الفضاء V إذا تحقّق الشرطين التاليين :

1) مهما كان الشعاعين x و y من f , فإنَّ : $x + y \in f$.
2) مهما كان الشعاع x من المجموعة الجزئية f و العدد الحقيقي a , فإنَّ حاصل ضرب هذا الشعاع بهذا العدد هو شعاع من المجموعة f .

ملاحظة : إنَّ المجموعة وحيدة العنصر $\{0\}$, و المجموعة الكلية V كل منهما تمثل فضاء شعاعي جزئي في المجموعة V .

خامساً : الأشعة المرتبطة خطياً و المستقلة خطياً :

لتكن لدينا المجموعة $s = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_m\}$, مجموعة جزئية من الفضاء المتجهي V , نقول عن متجهات المجموعة s أنّها مرتبطة خطياً إذا وُجدت أعداد حقيقية $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$, بحيث أنَّ هذه الأعداد ليست جميعها معدومة بالضرورة , و تحقق : $\sum_{i=0}^{n} a_i x_i = 0$.

و نقول عن متجهات المجموعة s أنها مستقلة خطياً إذا لم تكن مرتبطة خطياً .

- إذا كانت A مجموعة جزئية من فضاء V , نقول عن متجهات A أنها مستقلة خطياً إذا كانت متجهات أي مجموعة جزئية منها مستقلة خطياً .

نتوقَّف هنا في هذه المحاضرة .....

انتهت المحاضرة الأولى ....

إعداد : داني محفوض

مع أطيب تمنياتي بالتوفيق ..